série n°14

Exercice N°1

Chaque question ci-dessous comporte trois réponses possibles. Pour chacune de ces questions, une seule des réponses proposées est exacte. On demande de choisir cette réponse.

L'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

1/ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(1-x)e^x$. La valeur moyenne de f sur $[0\ ,1]$ est égale à

a) -1 b) $2-e$ c) $e-2$

2/ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{x}$ est égale à

a) $+\infty$ b) 2 c) 0

3/ L'espace ξ est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

Soit la sphère $(S):(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=3$ et le plan $P:2x-y-z=0$. (S) et P sont

a) tangents b) sécants c) disjoints.

4/ Soit A et B deux points distincts de l'espace.

L'ensemble des points M tels que : $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB}=0$ est

a) une droite b) une sphère c) un plan

Exercice N°2

Soit f la fonction définie par : $f(x)=\dfrac{x^2}{x+1}$ $\forall x\neq -1$

1/a) Montrer que : $\forall\ x\neq -1\ :\ f(x)=x-1+\dfrac{1}{x+1}$; b) En déduire $I=\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$

2/a) Montrer que $\forall x\in IR$: $\dfrac{e^{2x}}{e^x+1}=e^x-\dfrac{e^x}{e^x+1}$; b) Calculer $J=\displaystyle\int_0^1\frac{e^{2x}}{e^x+1}dx$

3/ Calculer à l'aide d'une intégration par partie : $K=\displaystyle\int_0^1 e^x\ln(e^x+1)\,dx$

Exercice N°3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=(1-x)e^{2x}-1$

On désigne par ζ_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ (unité 2 cm)

1/ Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=-\infty$. Interpréter graphiquement

2/ Montrer que la droite d'équation $D:y=-1$ est asymptote à ζ_f au voisinage $-\infty$

3/a) Montrer que pour $x\in\mathbb{R}$, on a : $f'(x)=(1-2x)e^{2x}$

b) Dresser le tableau de variation de f

4/ Montrer que ζ_f coupe l'axe des abscisses en deux points d'abscisse 0 et $\alpha\in\left]\dfrac{1}{2},1\right[$

5/ Tracer ζ_f

6 /a) Calculer à l'aide d'une intégration par partie $I=\int_0^{0,5}(1-x)e^{2x}\,dx$

b) En déduire l'aire A de la partie du plan limité par ζ_f , l'axe des abscisses et les droites d équations $x=0$ et $x=0,5$

Exercice N°4

Soit U la suite définie sur IN par : $\begin{cases} U_0=1 \\ U_{n+1}=2U_n+1 \end{cases}$

1/a) Calculer : U_1 et U_2

b) Montrer que la suite U n'est ni arithmétique, ni géométrique.

2/a) Montrer que pour tout n $\in$ IN, $U_n \geq 1$

b) Montrer que la suite U est strictement croissante.

3/ Soit la suite V définie sur IN par : $V_n = U_n + 1$

a) Montrer que V est une suite géométrique dont on précisera la raison.
b) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n
c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

4/ On donne $S=\sum\limits_{k=0}^{n-1} V_k$ et $S'=\sum\limits_{k=0}^{n-1} U_k$

Exprimer S puis S' en fonction de n

Exercice N°5

Soit U la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} U_0=0.5 \\ U_{n+1}=U_n^2 \end{cases}$

1/a) Montrer par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$: $0<U_n\leq 0.5$

b) Montrer que U est une suite strictement décroissante

c) En déduire que U est convergente et déterminer sa limite l

2/ On pose $V_n = \ln(U_n)$

a) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$: $V_n < 0$
b) Montrer que V est une suite géométrique de raison 2
c) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n
d) Retrouver $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$